Grupos não realizáveis por transformações lineares

Trabalho realizado por:

Ricardo Gonçalves

3.º ano LMAC - Computação

Teorema (bem conhecido!) :

"Todo o grupo finito G é (isomorfo a) um grupo de permutações"

Como uma permutação é uma transformação linear temos:

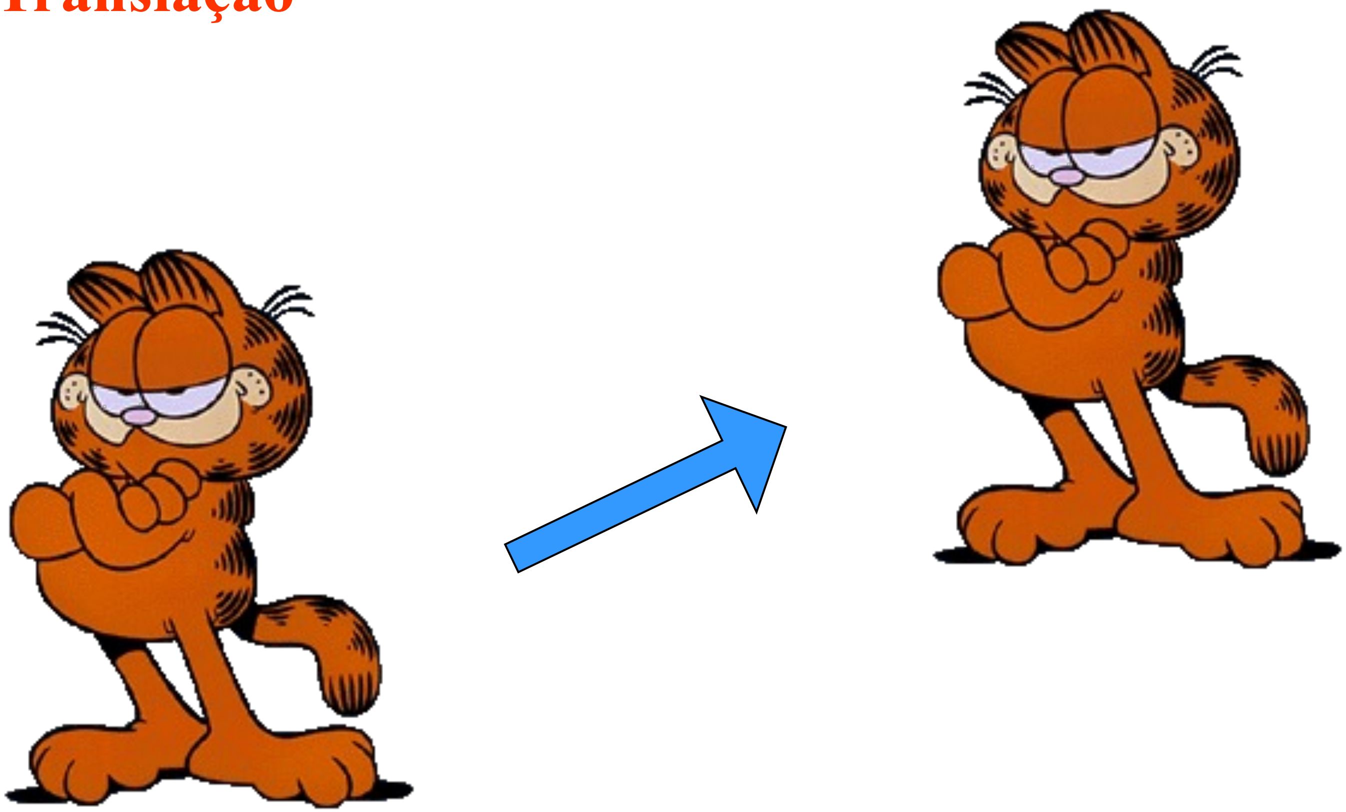
Teorema :

"Todo o grupo finito pode ser realizado como um grupo de transformações lineares"

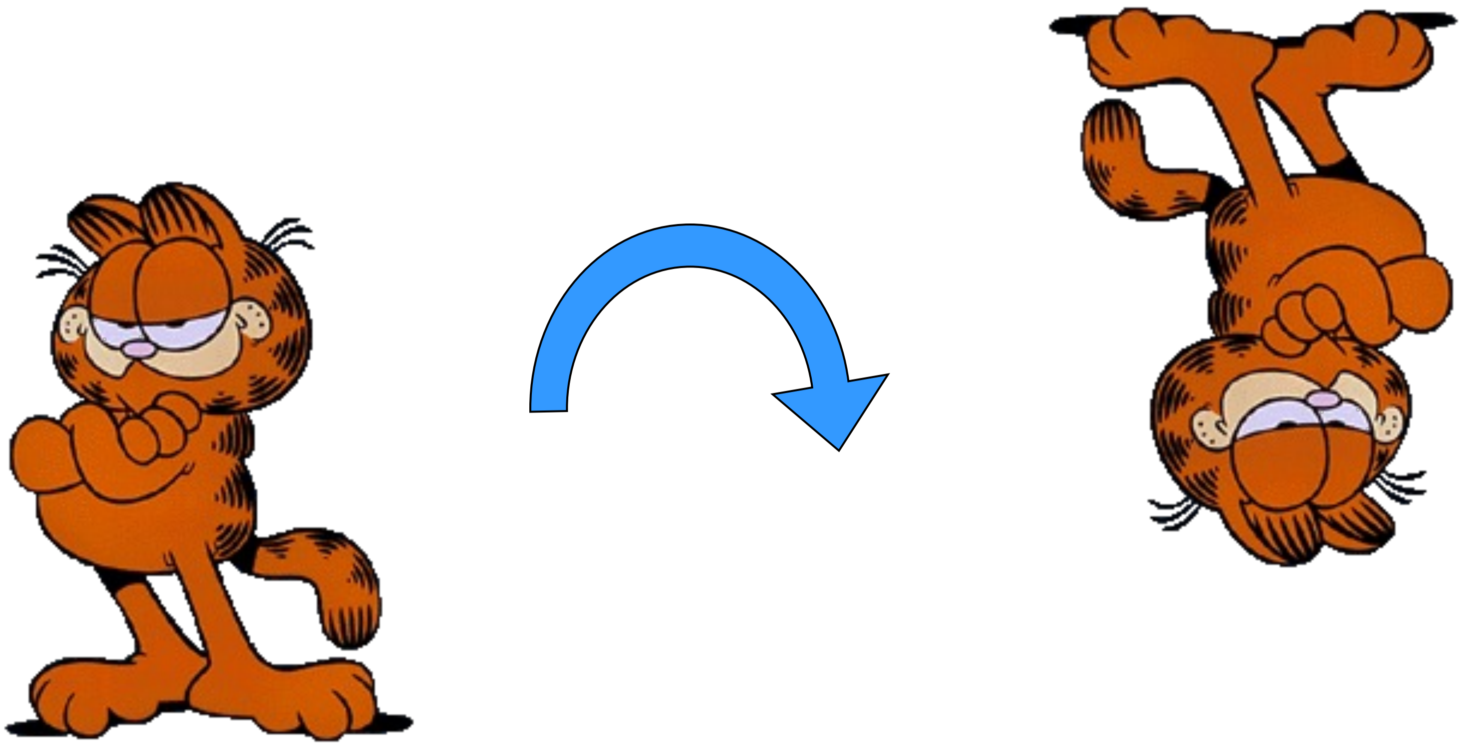
Qual é a situação para um grupo infinito?

Grupo das isometrias no espaço

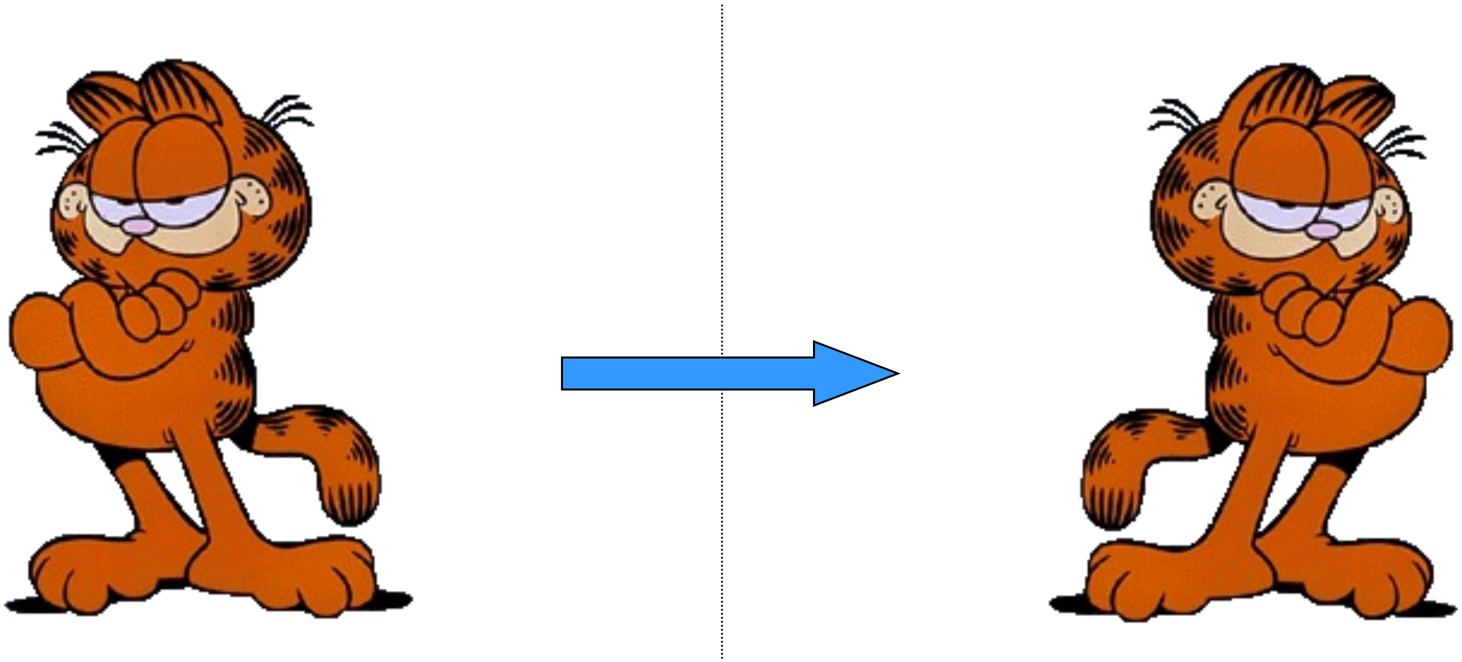
1) Translação



2) Rotação



3) Simetria



GRUPO

Em geral um grupo é uma estrutura algébrica (G, *) que satisfaz as seguintes propriedades:

1) ***A operação * tem identidade em G***

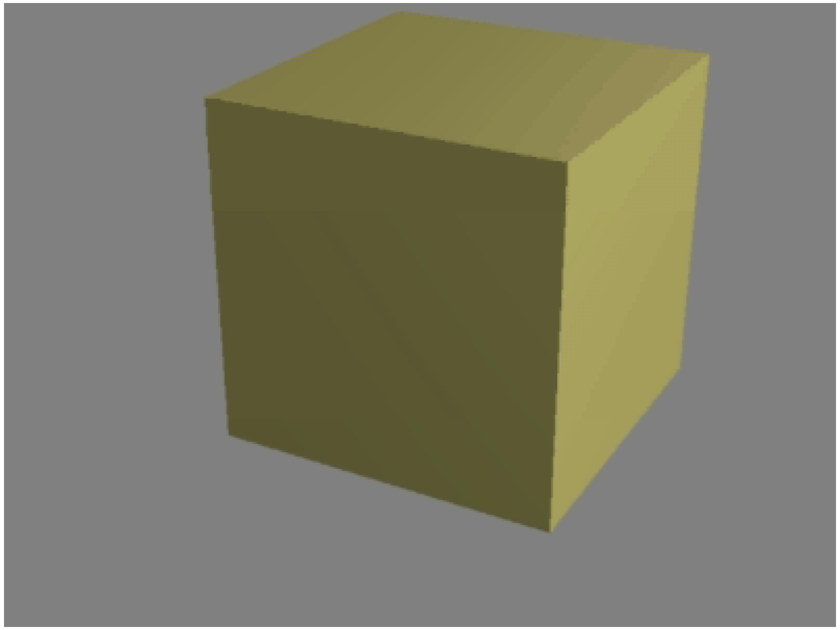
2) ***A operação é associativa***

3) ***Todos os elementos de G são invertíveis***

Exemplos de Grupos:

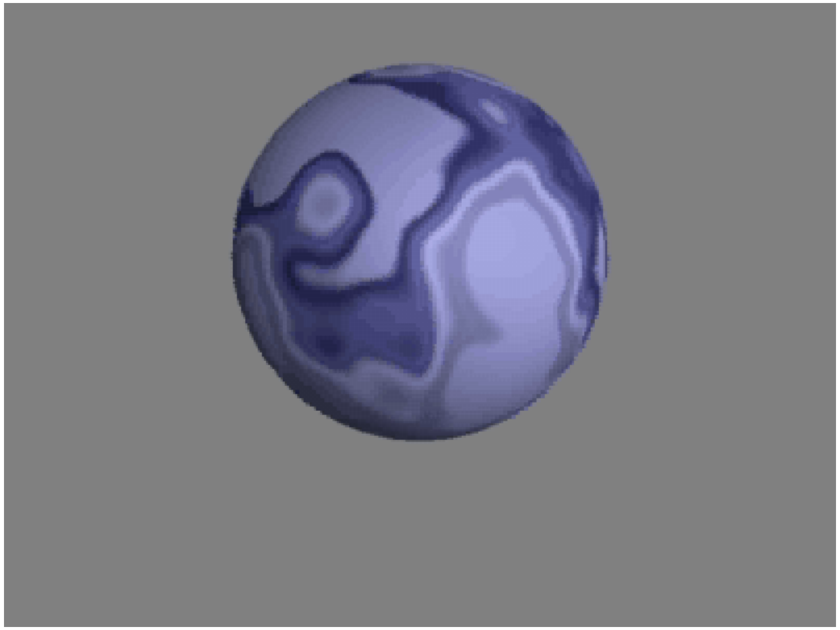
Grupo discreto VS Grupo contínuo

Grupo das simetrias do cubo



S_4

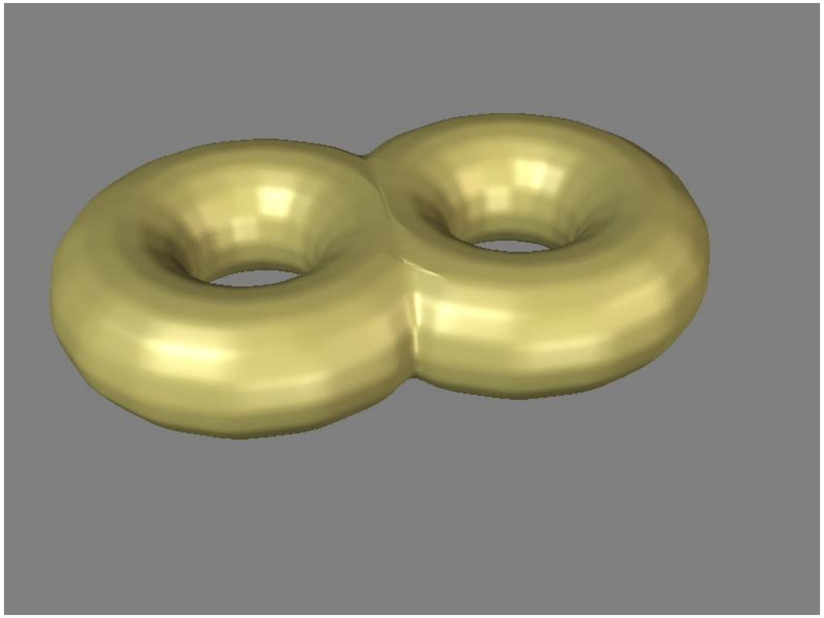
Grupo das simetrias da esfera



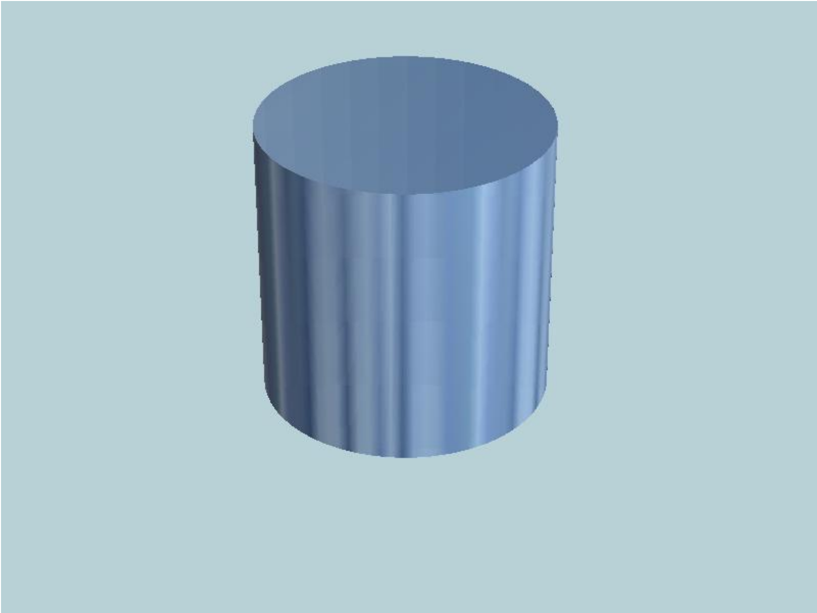
O (3)

VARIEDADES

Exemplos de variedades

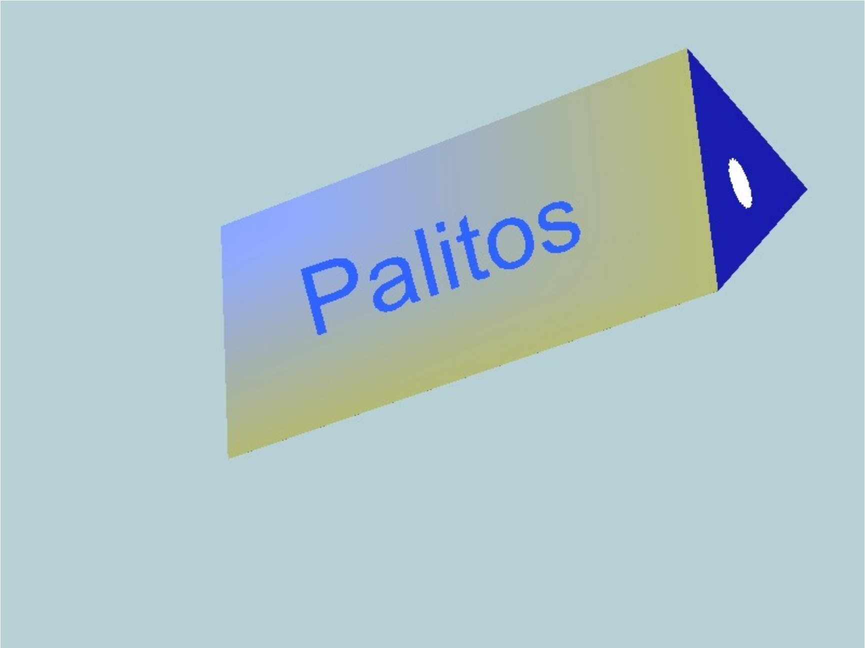


Género 2

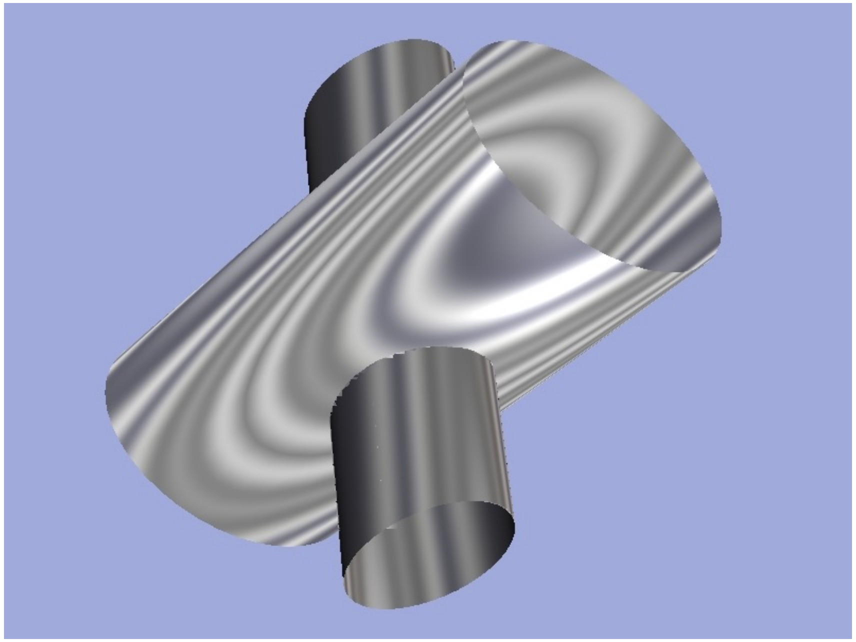


Cilindro

Exemplos de não variedades



Prisma triangular



Cano

GRUPO DE LIE

Um *grupo de Lie* G é um grupo que é também uma variedade, de tal modo que as operações do grupo

$m : G \times G \to G \qquad (g , h) \mapsto g * h$

e a inversão

$i : G \to G \qquad g \mapsto g^{-1}$

sejam aplicações suaves entre variedades.

Exemplos de Grupos de Lie

- O(3) grupo das rotações e reflexões no espaço

$$O(3) = \{ X \in GL(3) : X^T X = I \}$$

- SO(3) grupo das rotações no espaço

$$SO(3) = \{ X \in O(3) : \det(X) = +1 \}$$

SO(3) é a componente conexa de O(3) que contém a identidade

Em $\mathbb{R}^n$ temos :

- $O(n) = \{ X \in GL(n) : X^T X = I \}$
- $SO(n) = \{ X \in O(n) : \det(X) = +1 \}$

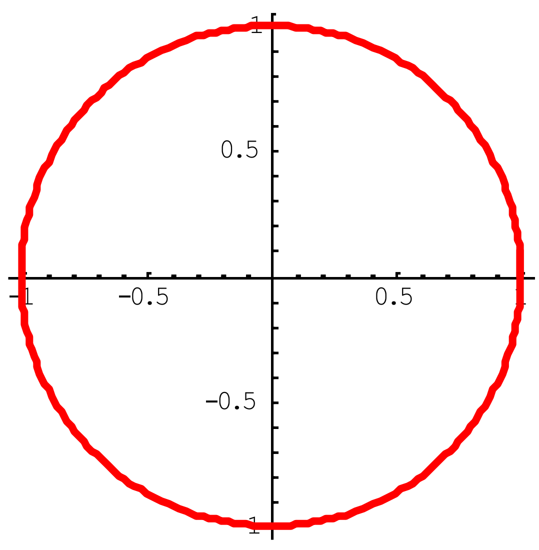
Exemplo: n = 2

- SO(2) grupo das rotações no plano

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{Cos}\,\theta & -\mathbf{Sen}\,\theta \\ \mathbf{Sen}\,\theta & \mathbf{Cos}\,\theta \end{pmatrix} : 0 \leq \theta < 2\pi \right\}$$

Podemos identificar S0(2) com o círculo unitário

$$S^1 = \{ \ (\mathbf{Cos}\,\theta\,,\ \mathbf{Sen}\,\theta\,) : 0 \leq \theta < 2\pi \ \}$$

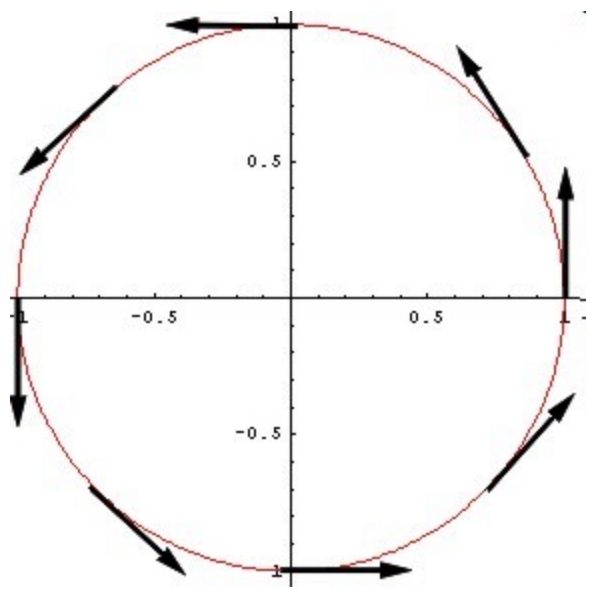


Campo Vectorial

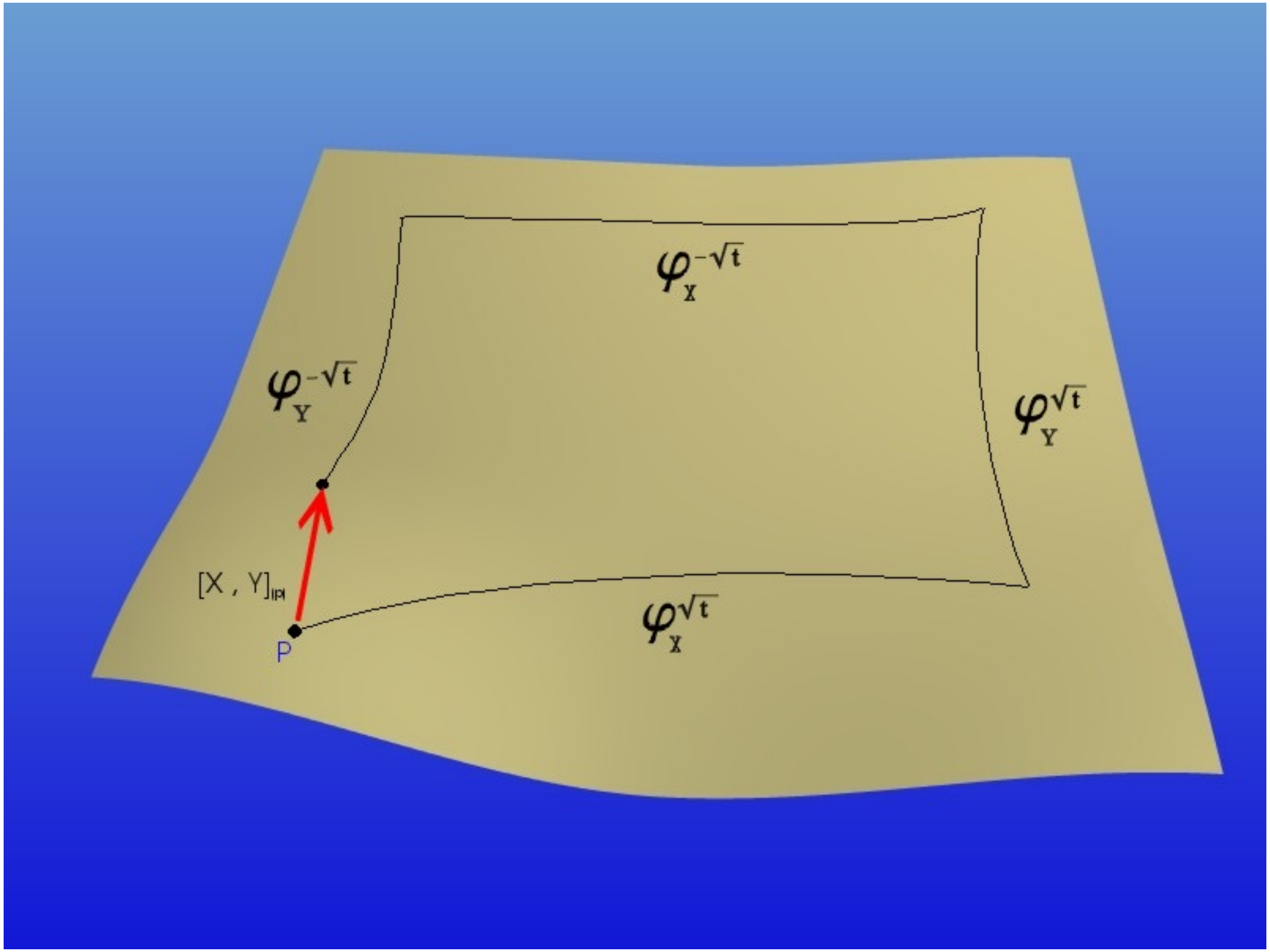
Um *campo vectorial V* numa variedade M é:

M □ x □ $V|_x$ □ espaço tangente a M no ponto x

Exemplo: SO(2)



Parêntesis de Lie



$$[\,X,\ Y\,]_{(p)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left(\varphi_Y^{-\sqrt{t}}\left(\varphi_X^{-\sqrt{t}}\left(\varphi_Y^{\sqrt{t}}\left(\varphi_X^{\sqrt{t}}(\mathrm{p})\right)\right)\right)\right)$$

Abstractamente uma **Álgebra de Lie** é um espaço vectorial ⍰ juntamente com uma operação bilinear

$$[\,\bullet\,,\,\bullet\,] : ⍰ \times ⍰ \rightarrow ⍰$$

chamada *parêntesis de Lie*, satisfazendo os axiomas:

a) Bilinearidade

$$[\, c\mathbf{v} + c'\mathbf{v'}, \mathbf{w}\,] = c[\mathbf{v},\mathbf{w}] + c'[\mathbf{v'},\mathbf{w}]$$

b) Anti-simetria

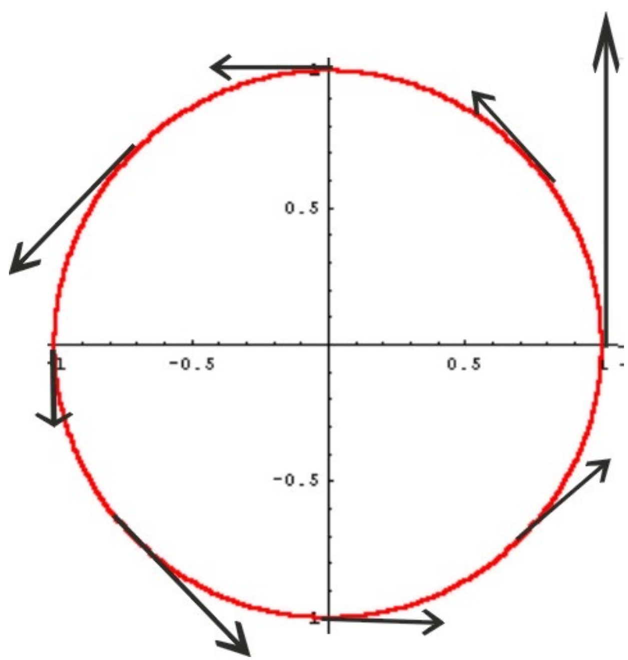
$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = -\,[\mathbf{w}, \mathbf{v}]$$

c) Identidade de Jacobi

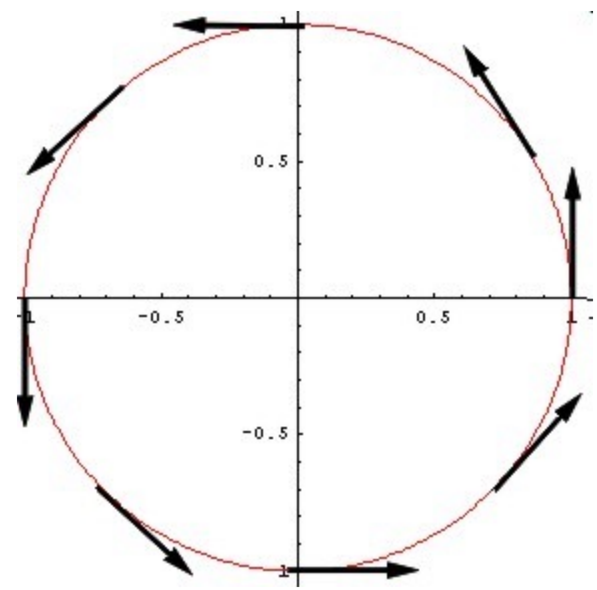
$$[\mathbf{u}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]] + [\mathbf{w}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]] + [\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{u}]] = 0$$

Num grupo de Lie existem campos vectoriais especiais chamados

‘ campos vectoriais invariantes à direita ‘



Campo vectorial não invariante à direita

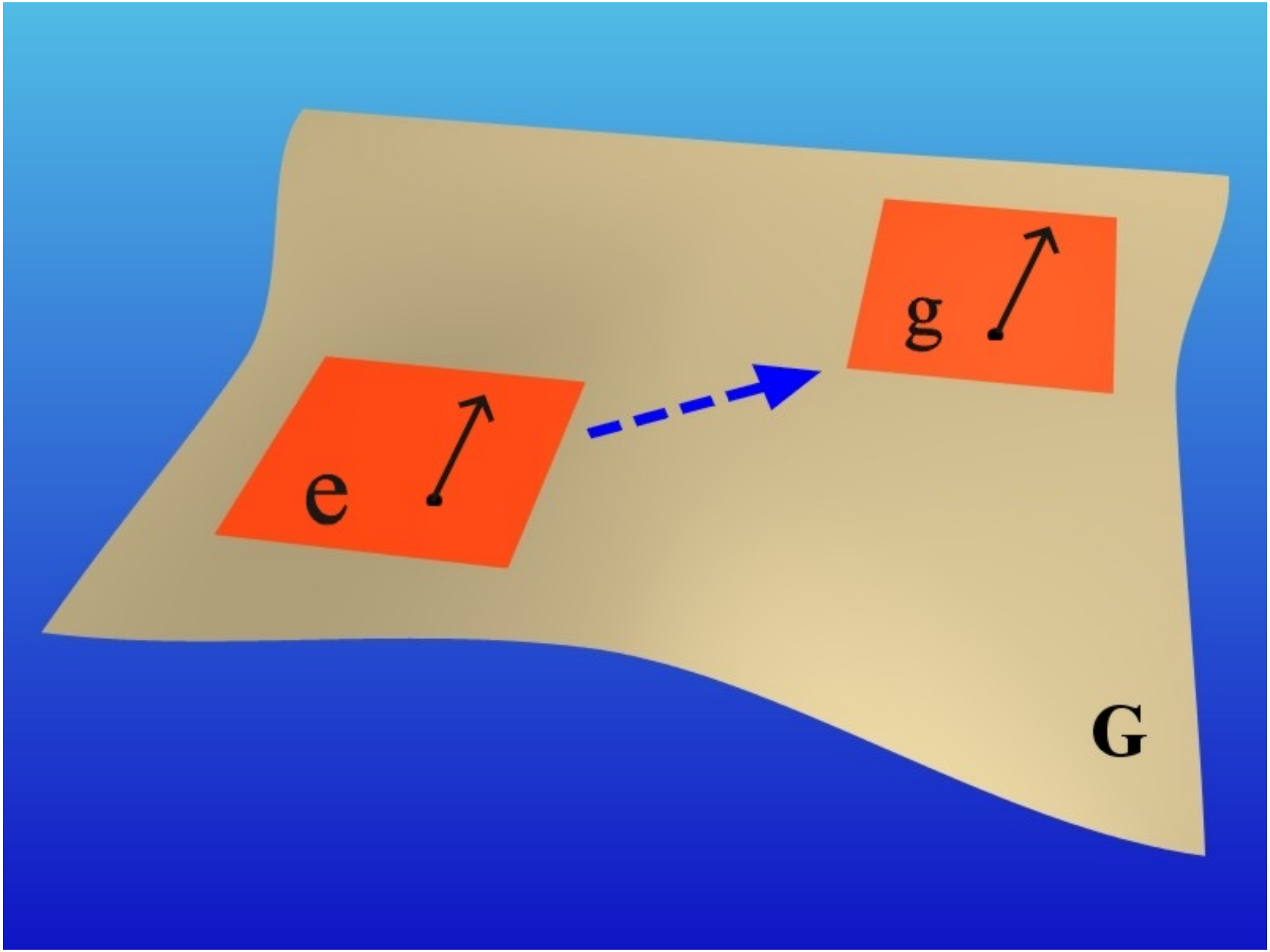


Campo vectorial invariante à direita

[campo invariante à direita , campo invariante à direita]

é um campo vectorial invariante à direita

Dado um grupo de Lie G, a álgebra de Lie de G, denotada por ▯, é o espaço vectorial de todos os campos vectoriais invariantes à direita em G.


g
e
G

GRUPO DE LIE

G

“ Global “

ÁLGEBRA DE LIE

campos vectoriais invariantes à direita em G

“ Infinitesimal “

Substituir condições não lineares de invariância por condições lineares infinitesimais relativamente simples

Exemplo:

$GL(n)$ = matrizes $n \times n$ invertíveis.

$\mathfrak{gl}(n)$ = espaço de todas as matrizes $n \times n$ com parêntesis de Lie sendo o comutador de matrizes.

$O(n)$ e $SO(n)$

$\mathfrak{so}(n)$ = espaço de todas as matizes anti-simétricas

$$= \{ X \in \mathfrak{gl}(n) : X^T + X = 0 \}$$

Podemos colocar a seguinte pergunta: (versão infinitesimal)

“ Será que todas as álgebras de Lie são isomorfas a alguma álgebra de matrizes? “

A resposta é afirmativa e é dado pelo importante Teorema de Ado:

Teorema: Seja ⍰ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então ⍰ é isomorfa a uma subalgebra de ⍰l(n) para algum n.

1) □ □ □ □ □^{1} H □ G , conexo

Logo □ □ □l(n) □ G □ GL(n)

1) + Teorema de Ado

□

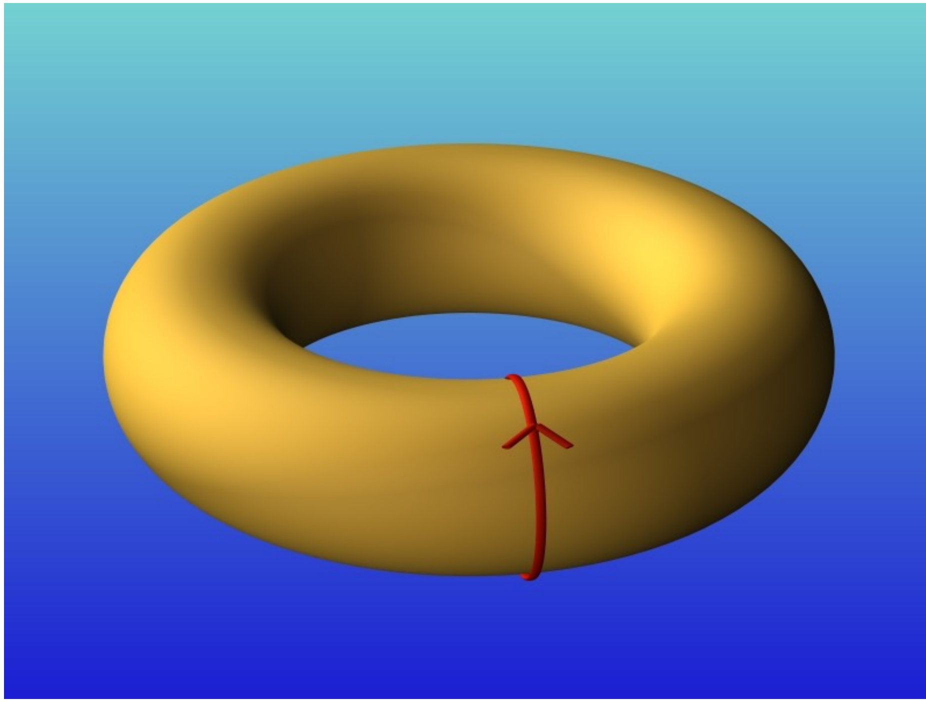
2) Álgebra de Lie □ □ Grupo de Lie

Pergunta: (versão global)

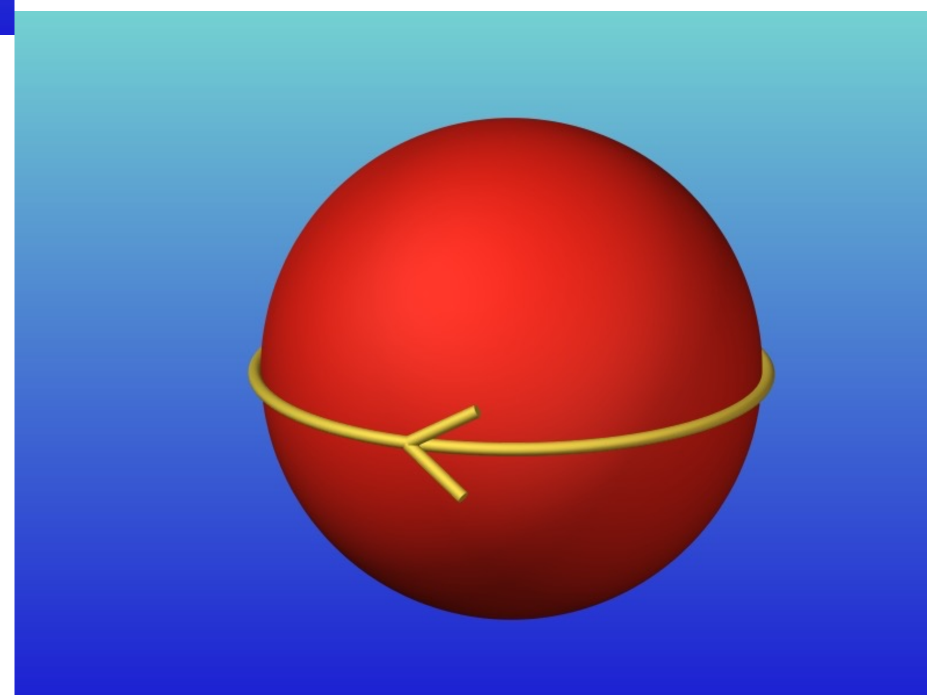
" Será que todos os Grupos de Lie são isomorfos a algum grupo de matrizes? "

Em geral

NÃO!

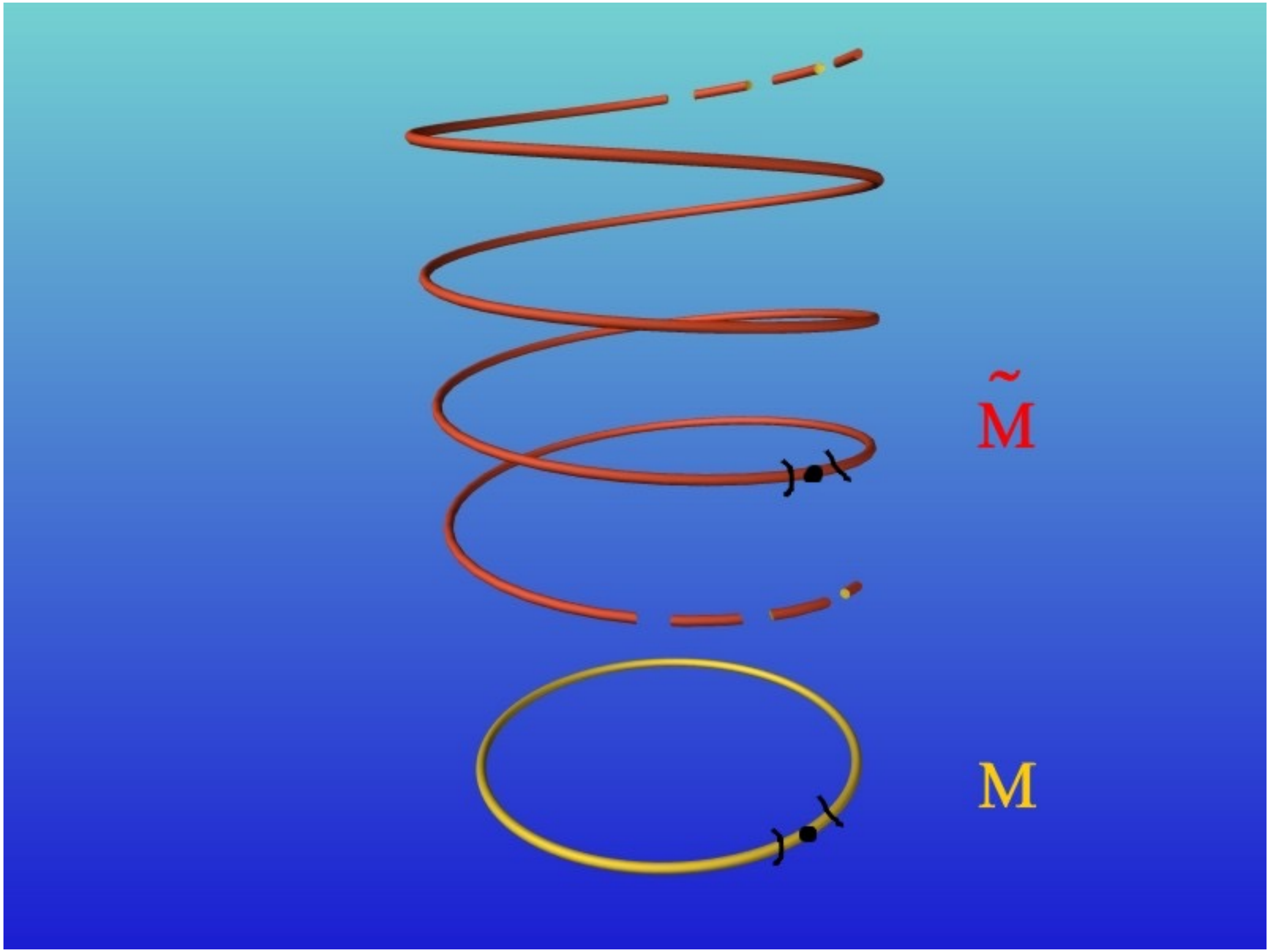


Não simplesmente conexo



Simplesmente conexo

Cobertura simplesmente conexa de uma variedade



A cobertura $\tilde{G}$ de um grupo de Lie G é um grupo de Lie !

- SO(3) não é simplesmente conexo

$$\widetilde{SO}(3) = SU(2) = \{ X \in GL(2, \mathbb{C}) : X\overline{X}^t = I \, , \, |\det X| = 1 \}$$

é cobertura de SO(3)

- SL(2) não é simplesmente conexo

$\widetilde{SL}(2)$ não é isomorfo a nenhum subgrupo de GL(n) (para qualquer n) !

Born: 17 Dec 1842 in Nordfjordeide, Norway

Sophus

Lie

Died: 18 Feb 1899 in Kristiania (now Oslo), Norway